Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

<u>Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.</u>

Préambule

1. Soit h la fonction qui, à tout réel strictement positif x, associe : $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$. Montrer que la fonction h est constante sur $]0, +\infty[$ (on précisera la valeur prise par h sur $]0, +\infty[$).
2. (a) Pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, exprimer $\cos t$ en fonction de $\cos \dfrac{t}{2}$.

   (b) Pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, comparer $\dfrac{1}{1+\tan^2 \dfrac{t}{2}}$ et $\cos^2 \dfrac{t}{2}$.

   (c) Pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose :

   $$u = \tan \frac{t}{2}$$

   On demande d'exprimer $\cos t$ en fonction de u.

Partie I

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^n x \, dx$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n est convergente.

   (b) Que vaut I_0 ?

   (c) Donner une primitive de la fonction qui, à tout réel positif x, associe : $e^{-x} \cos x$ (on pourra utiliser la fonction à valeurs complexes $x \mapsto e^{-x} e^{i x}$).

   (d) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, montrer, à l'aide d'une double intégration par parties, la relation :

   $$I_n = \frac{n\,(n-1)}{n^2+1} \, I_{n-2}$$

   (e) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de I_{2n} en fonction de n et du produit $\prod\limits_{k=0}^{n} \left(4\,k^2+1\right)$.

2. (a) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n = \ln \dfrac{2\,n\,(2n-1)}{4n^2+1}$. Etudier la nature de la série de terme général u_n.

   (b) Pour tout entier naturel non nul n, comparer : $\ln I_{2n}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

(c) Quelle est la limite de la suite de terme général I_{2n} ?

Partie II

Pour tout réel x de $]-1,1[$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos t}$.

1. Que vaut $F(0)$?
2. Soit $a \in]0,1[$. Etudier la dérivabilité de F sur $[-a,a]$, et exprimer, pour tout réel x de $[-a,a]$, $F'(x)$ en fonction de x.
3. Etudier la dérivabilité de F sur $]-1,1[$.
4. A l'aide du changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$, montrer que, pour tout réel x de $]-1,1[$:

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$$

(On pensera à utiliser le Préambule.)

5. En déduire, pour tout réel x de $]-1,1[$, une relation entre $F(x)$ et $F(-x)$.

Pour ce qui suit, on utilisera le fait que, pour tout réel x de $]-1,1[$:

$$(1-x^2)\,F'(x) = x\,F(x) + 1$$

6. (a) Donner la solution générale sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle homogène :

$$(\mathcal{E}_0) \qquad (1-x^2)\,y'(x) - x\,y(x) = 0$$

(b) A l'aide de la méthode de variation de la constante, donner la solution générale sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \qquad (1-x^2)\,y'(x) - x\,y(x) = 1$$

(c) Donner les solutions respectives des problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_0) \qquad \begin{cases} (1-x^2)\,y'(x) - x\,y(x) &= 1 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

et :

$$(\mathcal{P}_1) \qquad \begin{cases} (1-x^2)\,y'(x) - x\,y(x) &= 1 \\ y(0) &= \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

(d) Pour tout réel x de $]-1,1[$, déduire de la résolution de $(\mathcal{P}_1)$ une expression simplifiée de $F(x)$ avec la fonction arcsinus.

7. Pour tout réel x de $]-1,1[$, déduire de la question 2. la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t - x}{(1-x\cos t)^2}\,dt$.

8. Dans cette question, on recherche les solutions développables en série entière sur un domaine $]-R,R[\subset \mathbb{R}$, $R>0$, de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_R) \qquad (1-x^2)\,y'(x) - x\,y(x) = 1 \quad \forall x \in]-R,R[$$

sous la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \quad \forall x \in]-R,R[$$

où, pour tout entier naturel n, a_n est un réel. On pose : $a_0 = \lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Que vaut a_1 ?

(b) Donner, pour tout entier naturel non nul n, une relation de récurrence reliant a_{n+1} et a_{n-1}.

(c) Exprimer, pour tout entier naturel p, a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p et λ.

9. <u>On suppose désormais que :</u>

$$\lambda = 0$$

(a) Enoncer le critère de d'Alembert pour les séries numériques.

(b) Déterminer la valeur du rayon de convergence de $\sum a_n\, x^n$.

(c) A l'aide de la question 6. c., donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (\arcsin x)^2$. On précisera le rayon de convergence et le(s) théorème(s) utilisé(s)

10. <u>On suppose désormais que :</u>

$$\lambda = \frac{\pi}{2}$$

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$\mathcal{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$$

(a) Démontrer que la suite $(\mathcal{W})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(a)_{n\in\mathbb{N}}$, établie à la question 8. b.

(b) Calculer $\mathcal{W}_0$ et $\mathcal{W}_1$. Que remarque-t-on ?

(c) Déterminer le sens de variation et le signe de la suite $(\mathcal{W})_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire, pour tout entier naturel non nul p, une relation entre $\mathcal{W}_{2p+1}$, $\mathcal{W}_{2p}$ et $\mathcal{W}_{2p-1}$.

(d) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = 1$$

Qu'en est-il de :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} \quad ?$$

(e) Montrer que la suite de terme général $(n+1)\, a_n\, a_{n+1}$ est constante (on précisera la valeur de cette constante).

(f) Justifier que, lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,n}}$$

(g) Déterminer la valeur du rayon de convergence de $\sum a_n\, x^n$. On précisera le théorème utilisé.

(h) Montrer que, lorsque l'entier p tend vers l'infini :

$$\frac{1}{p}\, \frac{4^{2\,p}\, (p\,!)^4}{\left((2\,p)\,!\right)^2} \sim \pi$$

11. On suppose désormais que λ est quelconque. A l'aide des questions 9 et 10, déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n\, x^n$.

Dans la première partie, on étudie des variantes, sous forme d'intégrales généralisées, des classiques intégrales de Wallis. On les retrouve en seconde partie, à travers l'étude cette fois d'une intégrale à paramètres vérifiant une équation différentielle, et pouvant aussi s'exprimer comme la somme d'une série entière. Ces intégrales, telles qu'exposées par le mathématicien anglais John Wallis (1616-1703), dans son livre ≪ Arithmetica infinitorum ≫, concernaient initialement le calcul de $\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx$, $n \in \mathbb{N}$, *en lien avec l'aire du disque unité, ce qui conduit à une méthode permettant d'approximer le nombre transcendant* π.

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1094 – D'après documents fournis